关于线性空间、线性变换的试卷设计

厦门大学数学科学学院
林　鹭

2009.5 福清

线性空间主要内容

- 线性空间、线性空间的同构
- 线性相关性
- 极大无关组、线性表示
- 基、过渡矩阵、维数、坐标向量
- 维数公式
- 子空间、空间直和分解
- 线性方程组理论
- 矩阵的秩

线性变换主要内容

- 线性映射
- 表示矩阵
- 不变子空间
- 像空间、核空间
- 维数公式
- 线性同构

代数学基本思想

- 等价分类的思想
- 直和分解的思想
- 同构对应的思想

线性空间、线性映射两章内容包括了以上代数学主要思想

试卷除了涵盖相关概念外，还应体现代数学主要思想方法，尤其是同构对应思想

试卷处理

- 抓基础知识 试卷几乎涵盖全部基本概念
  - 填空题、选择题一般各6-8题，每题3-4分
  - 大题量小工作量，突出概念，避免繁琐计算
- 重代数思想和代数方法
  - 计算题：或一道大题，或结合进填空选择题中
  - 证明题： 2到3道
    - 1至2道较为简单，涉及基本思想方法；
    - 1道压轴题，分值不大，多种思想及方法的综合

基础题 （以05-06年试卷为例）

4. 设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的导出组，则_____.

A) 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=\beta$ 有唯一解；

B) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=\beta$ 有无穷多解；

C) 若 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解；

D) 若 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

6. $K^{2\times1}$ 上线性变换 φ 定义如下： $\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b \\ 2b+a \end{pmatrix}$，则 φ 在基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的表示矩阵是________， $\dim \operatorname{Im}\varphi=$ ________.

“陷阱”题

6．设φ,ψ是**V**到**W**上的线性映射，且$\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$，则_____.

A) $\forall\alpha\in \mathrm{V},\ \varphi(\alpha)=\psi(\alpha)$；　　**B)** $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$；

C) $\varphi,\ \psi$在任一组基下的表示矩阵的秩相同；

D) 若**U**是$\varphi-$子空间，则**U**也是$\psi-$子空间.

8．设**V**是$\boldsymbol{n}$维线性空间，φ是线性空间**V**上的线性变换。如果**U**是$\boldsymbol{m}$维$\varphi-$子空间，则φ在**V**的_____，其中$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{m}$阶方阵.

A) 任意基下的表示矩阵形如$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$；

B) 某组基下的表示矩阵形如$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$；

C) 某组基下的表示矩阵形如$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$；

D) 任意基下的表示矩阵为对角阵.

多知识点题

3． 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 A 满足 $r(A) = r < n-1$，A^*是 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系中包含线性无关解向量有________个.

A) $n-r$　　B) r　　C) 0　　D) n

2． 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵且 $r(A)=m<n$，则下列结论正确的有_____个.

1) 存在 A 的一个 m 阶子式不等于 0；

2) A 的列向量必线性相关；

3) 若 $AB = 0$，则 $B = 0$；

4) 存在矩阵 B，使得 $AB = I_m$.

A) 1　　B) 2　　C) 3　　D) 4

计算题

三、(15 分) 已知 3 阶非零矩阵 B 的每个列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解向量.

1) 求 λ 的值;　　2) 求行列式 $|B|$.

考点：秩，线性方程组解与秩的关系

亮点：灵活运用知识点，无须太大计算量

证明题

四、 (15 分) 设 $r(A)=r,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r+1}$ 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解. 证明:

1) $\eta_1,\eta_2-\eta_1,\dots,\eta_{n-r+1}-\eta_1$ 线性无关;

2) $Ax=\beta$ 的解可表示为 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$ 的充分必要条件是 $k_1+k_2+\dots+k_{n-r+1}=1$.

考点：线性方程组解结构理论；线性相关性证明

难度：初级

亮点：探讨非齐次线性方程组解集

证明题

五、 **(15分)** 设3维线性空间V上线性变换φ在某组基下的表示矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.记$L(\mathrm{V})$为V上线性变换全体，而

$$C(\varphi)=\{\psi \mid \varphi\psi=\psi\varphi,\psi\in L(V)\}.$$

1) 证明$C(\varphi)$是$L(\mathrm{V})$的子空间;

2) 求$C(\varphi)$的一组基和维数.

考点：子空间；线性同构；基；维数

难度：中级

亮点：同构思想

取代表元

证明题

六、(7 分) 设 $A \in \mathrm{K}^{n\times n}, I$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵，令

$$\mathrm{V}_1 = \left\{x \mid (A-I)x = 0, x \in \mathrm{K}^{n\times 1}\right\}，\ \mathrm{V}_2 = \left\{x \mid (A+I)x = 0, x \in \mathrm{K}^{n\times 1}\right\}$$

证明 $\mathrm{K}^{n\times 1} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ 的充要条件是 $A^2 = I$.

考点：空间直和分解；解空间维数；秩

难度：高级

亮点：直和分解思想；多种关系的相互转化；多种解题方法

其他变形：1）$\mathrm{V} = \mathrm{Ker}(A-I) \oplus \mathrm{Ker}(A+I)$ 的充要条件是 $A^2 = I$

1')$\mathrm{V} = \mathrm{Im}(A+I) \oplus \mathrm{Im}(A-I)$ 的充要条件是 $A^2 = I$

2)$\mathrm{V} = \mathrm{Ker}(A-I) \oplus \mathrm{Ker}(A)$ 的充要条件是 $A^2 = A$

附加题：证明$\forall A\in \mathrm{R}^{n\times m},\forall b\in \mathrm{R}^{n\times 1}$，非齐次线性方程组$A'Ax=A'b$必有解.

考点：线性方程组　　难度：特级　　亮点：技巧性和综合性强

法一 线性方程组同解、秩

①$A'Ax=0$与$Ax=0$同解$\to r(A'A)=r(A)\to r(A'A)=r(A')$

②$r(A'A\ A'b)\geqslant r(A'A)$

③$r(A'A\ A'b)=r(A'(A\ b))\leqslant r(A')=r(A'A)$

法二 相抵标准型、分块矩阵

①存在可逆P,Q,使$A=PDQ$, 其中$D=\mathrm{diag}(I_r,0)$. 令$y=Qx$, $a=P'b$, $B=P'P$, 问题化为证$DBDy=a$有解

②$P=(P_1,P_2)$,B为2×2分块矩阵, 左上角为B_1, 则$B_1=P_1'P_1$可逆

③$DBDy=a$等价于解$B_1y_1=a_1$, 其中y_1, a_1分别由y, a前r分量组成

本试卷不足之处

- 不变子空间（像空间、核空间）亮点一般
- 利用扩基证明方法未涉及

谢　谢！